Teoretická část - 14.1.2021

1. (a) Zformulujte:
   - Rolleovu větu,
   - Lagrangeovu větu o střední hodnotě,
   - Cauchyovu větu o střední hodnotě

   (3 body)

   (b) Lagrangeovu větu o střední hodnotě dokažte (1 bod).

   (c) Nechť $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[1, 2]$, $f(1) = 7$, $f(2) = 13$ a f má derivaci na $(1, 2)$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

   (i) existuje $c \in (1, 2)$, že $f'(c) > 0$,

   (ii) existují $c, d \in (1, 2)$, $c \neq d$, že $f'(c) > 0$ a $f'(d) > 0$,

   (iii) existuje $c \in (1, 2)$, že $f'(c) = 4c$

   (4 body).

2. (a) Napište definici dělení intervalu, dolního (riemannovského) součtu a dolního Riemannova integrálu (3 body).

   (b) Zformulujte větu o vlastnostech dělení (1 bod).

   (c) Nechť $f, g : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ jsou omezené na $[-3, 3]$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

   (i) je-li $f \geq g$ na $[-3, 3]$, potom $s(f, D) \geq s(g, D)$ pro libovolné $D \in \mathfrak{D}([-3, 3])$,

   (ii) je-li $f \geq g$ na $[-3, 3]$, potom $\displaystyle \underline{\int_{-3}^{3}} f \geq \underline{\int_{-3}^{3}} g$,

   (iii) je-li f lichá, potom $\displaystyle \underline{\int_{-3}^{3}} f \leq 0$,

   (iv) je-li f lichá, potom $\displaystyle \underline{\int_{-3}^{3}} f \geq 0$,

   (v) je-li f lichá a spojitá na $[-3, 3]$, potom $\displaystyle \underline{\int_{-3}^{3}} f = 0$,

   (vi) je-li $f(x) \geq x$, $x \in [-3, 3]$, potom $\displaystyle \underline{\int_{-3}^{3}} f \geq 0$,

   Vše řádně zdůvodněte (4 body).

3. (a) Definujte pojmy $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$ a $f(x) \sim g(x)$, $x \to a$ (2 body).

   (b) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v bodě 6 vlastní derivaci. Dokažte, že platí

$$f(x) - f'(6)(x-6) - f(6) = o(x-6), \quad x \to 6.$$

   (1 bod).

   (c) Nechť f, g, φ, ψ jsou definovány na $\mathbb{R}$ a nechť splňují $f(x) \sim g(x)$, $x \to 1$ a $\varphi(x) \sim \psi(x)$, $x \to 1$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

   (i) $f(x) + \varphi(x) \sim g(x) + \psi(x)$, $x \to 1$,

   (ii) $f(x) \cdot \varphi(x) \sim g(x) \cdot \psi(x)$, $x \to 1$,

   (iii) $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \sim \dfrac{g(x)}{\psi(x)}$, $x \to 1$,

   (iv) pokud f' a g' existují vlastní na $\mathbb{R}$, potom

$$f'(x) \sim g'(x), \quad x \to 1,$$

   (v) pokud F je primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$ a G je primitivní funkce k g na $\mathbb{R}$, potom

$$F(x) - F(1) \sim G(x) - G(1), \quad x \to 1$$

   .

   Vše řádně zdůvodněte (5 bodů).